Corrigé 1. (16 points, 2 points par question)

(a) L'affirmation est fausse. Fixant le jour de naissance du premier enfant. il y a une chance sur $365^2 = 133225$ que les deux autres enfants soient nés le même jour.

(b) Soit H l'événement "être un homme", F l'événement "être une femme", et D l'événement "être daltonien". D'après l'énoncé, $\Pr(D \mid H) = 0.05$, $\Pr(D \mid F) = 0.0025$ et $\Pr(H) = 1/3$. Ainsi,

$$\Pr(H \mid D) = \frac{\Pr(D \mid H)\Pr(H)}{\Pr(D \mid H)\Pr(H) + \Pr(D \mid F)\Pr(F)} \approx 0.91.$$

(c) Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ,

$$M_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{e^t\lambda} = e^{\lambda(e^t-1)}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Puisque $M_X'(t) = \lambda e^t \exp\{\lambda(e^t-1)\}$, $\mathrm{E(X) = M_X'(0)} = \lambda$, et puisque $M_X''(t) = (\lambda e^t + \lambda^2 e^{2t})\exp\{\lambda(e^t-1)\}$, $\mathrm{E(X^2) = M_X''(0)} = \lambda + \lambda^2$. Ainsi, $\mathrm{var(X)} = \lambda$.
On accepte aussi des calculs (plus facile) avec la CGF, $K_X(t) = \log M_X(t)$.

(d) Pour tout y,

$$\Pr(Y \le y) = \Pr\{-\log(X) \le y\} = \Pr\{X \ge \exp(-y)\} = \exp\{-\exp(-y)\},$$

et ainsi la densité de Y est $f_Y(y) = \exp\{-y - \exp(-y)\}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

(e) Pour tout $y > 0$,

$$\Pr(Y > y) = \Pr(X_1 > y, X_2 > y) = \exp(-\lambda_1 y)\exp(-\lambda_2 y) = \exp\{-(\lambda_1+\lambda_2)y\},$$

et donc Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

(f) Soit X_i, $i = 1, \ldots, 85$, le temps d'installation du fichier i. On cherche à calculer $\Pr(\sum_{i=1}^{85} X_i \le 20 \times 60)$. Les X_i sont iid, donc par le théorème central limite,

$$\frac{\sum_{i=1}^{85} X_i - 85 \times 15}{4\sqrt{85}} \simeq \mathcal{N}(0,1),$$

et

$$\Pr\left(\sum_{i=1}^{85} X_i \le 20 \times 60\right) \simeq \Phi\{(20 \times 60 - 85 \times 15)/(4\sqrt{85})\} \approx \Phi(-2.03) \approx 0.02.$$

(g) La log-vraisemblance pour $X_1, \ldots, X_n$ échantillion de $\mathcal{B}(10, p)$ s'écrit

$$\ell(p) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \log(C_n^{X_i}) + X_i \log(p) + (10 - X_i) \log(1-p) \right\}$$

En dérivant $\ell(p)$ et en l'annulant, on obtient $\hat{p} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{10n}$. Puis,

$$\mathrm{E}(\hat{p}) = \frac{n\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)}{10n} = \frac{10p}{10} = p,$$

et donc $\hat{p}$ est un estimateur non biaisé de p.

(h) Un intervalle de confiance à 95% pour μ est $[\bar{x} - t_{19}(0.975)s/\sqrt{20}, \bar{x} - t_{19}(0.025)s/\sqrt{20}] = [18.66, 23.34]$. Au seuil 95% on rejette l'hypothèse $\mu = 24$.

Corrigé 2. *(7 points)* On note A, B, C les variables aléatoires des temps de calcul pour chacune des trois sections du programme.

(a) *(1 point)* On a

$$\mathrm{cov}(A, C) = \mathrm{corr}(A, C)\sigma_A\sigma_C = 0.2 \times 2.5 \times 1.3 = 0.65.$$

(b) *(2 points)* On a

$$\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(A + B + C) = \mathrm{E}(A) + \mathrm{E}(B) + \mathrm{E}(C) = 5.5 + 3.4 + 4.5 = 13.4,$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(T) &= \mathrm{var}(A + B + C) \\ &= \mathrm{var}(A + C) + \mathrm{var}(B) \\ &= \mathrm{var}(A) + \mathrm{var}(C) + 2\mathrm{cov}(A, C) + \mathrm{var}(B) \\ &= 2.5^2 + 1.3^2 + 2 \times 0.65 + 2.6^2 \\ &= 16. \end{aligned}$$

(c) *(2 points)* Le temps de calcul de la section B est la somme de 100 temps de calculs identiquement distribués et indépendants. D'après le théorème central limite, la distribution de B est approximativement normale. Ses paramètres sont ceux obtenus empiriquement, $B \simeq \mathcal{N}(3.4, 6.76)$.

(d) *(2 points)* La loi de T est approximativement normale comme somme de lois normales avec $T \simeq \mathcal{N}(13.4, 16)$. On a alors

$$\Pr(T \leq 10) = \Pr\left(\frac{T - 13.4}{\sqrt{16}} \leq \frac{10 - 13.4}{\sqrt{16}}\right) = \Phi(-0.85) \approx 0.20,$$

et

$$\Pr(T \geq 20) = \Pr\left(\frac{T - 13.4}{\sqrt{16}} \geq \frac{20 - 13.4}{\sqrt{16}}\right) = 1 - \Phi(1.65) \approx 0.05.$$

Corrigé 3. *(6 points)*

(a) *(2 points)* Un QQ-plot normal trace les quantiles empirique de notre échantillon de données contre les quantiles théorique de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Il permet de juger de l'adéquation de la loi normale pour modéliser nos données. Si les points du QQ-plot sont sur une droite, il y a une parfaite correspondance entre les quantiles empiriques et théoriques, ainsi la loi normale est une bonne approximation de la loi de nos données.
Sur ce QQ-plot on observe que l'on ne peut pas faire passer une droite par tous les points. Par contre, on pourrait tracer une droite qui passerait par la plupart des points si l'on excluait les deux valeurs les plus petites de l'échantillon. On peut donc logiquement supposé que ces deux valeurs sont des données abérrantes, par exemple résultant d'erreurs de mesure. Afin d'être plus précis, il faudrait rajouter les intervalles de confiance sur ce graphique.

(b) *(2 points)* En supposant que ces données sont normalement distribuées, on peut en déduire un intervalle de confiance pour la vitesse de la lumière v :

$$[\bar{x} - t_{65}(0.995)s/\sqrt{66}, \bar{x} - t_{65}(0.005)s/\sqrt{66}] = [24.8227, 24.8297].$$

(c) *(1 point)* La valeur de v acceptée aujourd'hui est clairement en dehors de l'intervalle de confiance précédemment calculé et n'est donc pas supporté par notre analyse des données de Newcomb.

(d) *(1 point)* Il semblerait judicieux de supprimer de notre analyse les deux plus petites valeurs de l'échantillon qui semblent abérantes. Avec ceci, l'hypothèse de normalité est plus adéquate et ainsi l'intervalle de confiance mieux calculé. La moyenne $\bar{x}$ va augmenter et la déviation standard s diminuer.

Corrigé 4. *(7 points)*

(a) (i) *(2 points)* La log-vraisemblance s'écrit

$$\ell(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) \log \lambda - n\lambda,$$

d'où l'on trouve en annulant sa dérivée $\hat{\lambda} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$.

(ii) *(2 points)* L'information de Fisher est

$$I(\lambda) = \mathrm{E}\left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ell(\lambda) \right\} = \mathrm{E}\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\lambda^2} \right\} = \frac{n}{\lambda}.$$

Pour n grand, $\hat{\lambda}$ suit approximativement une loi normale $\mathcal{N}\{\lambda, 1/I(\lambda)\}$ soit $\mathcal{N}\{\lambda, \lambda/n\}$. Une autre façon d'obtenir un approximation de la loi de $\hat{\lambda}$ est de calculer l'information observée.

(b) (i) *(2 points)* La loi à posteriori de λ est

$$\begin{aligned} \pi(\lambda \mid X_1, \ldots, X_n) &\propto f(X_1, \ldots, X_n \mid \lambda) \pi(\lambda) \\ &\propto e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^{n} X_i} \lambda^{\alpha - 1} e^{-\beta\lambda} \\ &= e^{-\lambda(n+\beta)} \lambda^{\alpha + \sum_{i=1}^{n} X_i - 1}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\pi(\lambda \mid X_1, \ldots, X_n) = \mathrm{Gamma}(\alpha + \sum_{i=1}^{n} X_i, n + \beta)$.

(ii) *(1 points)* L'espérance et la variance de la loi à postériori de λ sont

$$\mathrm{E}(\lambda \mid X_1, \ldots, X_n) = \frac{\alpha + \sum_{i=1}^{n} X_i}{n + \beta}, \quad \mathrm{var}(\lambda \mid X_1, \ldots, X_n) = \frac{\alpha + \sum_{i=1}^{n} X_i}{(n + \beta)^2}.$$

Ainsi, l'espérance converge vers λ et la variance est équivalente à $\bar{X}/n \approx \lambda/n$ quand $n \to \infty$. De plus puisque $\alpha + \sum_{i=1}^{n} X_i \to \infty$ pour $n \to \infty$, la loi Gamma (à posteriori) converge vers une loi normale. Asymptotiquement, l'approche Bayésienne et le maximum de vraisemblance sont équivalent.